

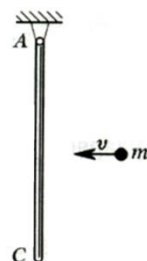
Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГАОУ ВО «МФТИ (ГУ)»

Экзамен для переводников и восстанавливающихся на третий семестр

июль 2016 г.

1. На какую величину удлинится однородный стержень, подвешенный за один конец, под действием собственного веса. Модуль Юнга материала стержня E , его длина L , площадь поперечного сечения S , масса M .
2. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H . На какой высоте h надо сделать небольшое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Воду считать идеальной жидкостью.
3. Однородный стержень длиной L подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Определить угол, на который отклонится стержень при попадании в него кусочка пластилина массой m . Считать, что он летит горизонтально со скоростью v и прилипает к середине стержня на расстоянии $L/2$ от точки A . Масса стержня $M = 6m$. Угол отклонения стержня меньше 90° .
4. В закрытом сосуде объемом V находятся азот и гелий при температуре T и давлении P . Массы газов равны. Молярные массы гелия и азота равны, соответственно, μ_1 и μ_2 . Какое количество теплоты надо сообщить смеси газов, чтобы нагреть ее на ΔT ?
5. Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном вертикально расположенном цилиндре. Наружное давление пренебрежимо мало. Температура газа T_0 . Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. Насколько изменилась температура газа и возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу, после установления нового равновесного состояния?



Решение

1. Разобьём стержень на тонкие диски, толщиной dx . Рассмотрим диск, расположенный на расстоянии x от закреплённого конца. На него действует сила $F = \frac{M}{L}(L-x)g$, обусловленная весом части стержня, расположенной снизу от диска. Используя закон Гука, найдём изменение толщины диска dL_x :

$$F/S = E \frac{dL_x}{dx}.$$

Выполнив суммирование по всем дискам, получим величину удлинения

$$\text{стержня: } \Delta L = \int_0^L \frac{F dx}{S \cdot E} = \frac{Mg}{LSE} \int_0^L (L-x) dx = \frac{MgL}{2SE}.$$

2. По формуле Торричелли скорость истечения струи $v = \sqrt{2g(H-h)}$.

Время полёта струи до стола $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. За это время вода окажется на расстоянии

$$L = L(h) = v \cdot t = 2\sqrt{h(H-h)}. \quad (1)$$

Значение L максимально для $h = h_0$, для которого $L'_h(h_0) = 0$.

Дифференцируя (1) по h , получим: $\frac{1}{\sqrt{h(H-h)}}(H-2h) = 0$.

Таким образом, $h_0 = H/2$.

3. Из закона сохранения момента импульса: $I\omega = mv \frac{L}{2}$.

Здесь $I = \frac{ML^2}{3} + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}mL^2$. Следовательно, $\omega = \frac{2}{9}v/L$.

Из закона сохранения энергии: $I \frac{\omega^2}{2} = (M+m)g \frac{L}{2}(1 - \cos\varphi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}mL^2 \left(\frac{2}{9}v/L\right)^2 = 7mgL(1 - \cos\varphi_{max})$$

Ответ: $\cos\varphi_{max} = 1 - \frac{v^2}{63gL}$.

4. Для гелия $C_{1V} = \frac{3}{2}R$. Для азота $C_{2V} = \frac{5}{2}R$.

$$Q = \frac{m}{\mu_1} C_{1V} \Delta T + \frac{m}{\mu_2} C_{2V} \Delta T. \quad PV = \left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2}\right) RT$$

Из данных соотношений получаем: $Q = \frac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \frac{PV}{2T} \Delta T$.

5. Из закона сохранения энергии: $\nu C_V(T - T_0) = 2mg(x_0 - x)$. Здесь x это расстояние от дна до поршня. Из уравнения состояния идеального газа:

$$P_0 \cdot (x_0 S) = \nu RT_0 \quad \text{и} \quad P \cdot (xS) = \nu RT.$$

Здесь $P_0 S = mg$ и $PS = 2mg$, т.к. масса груза полностью определяет давление газа.

Следовательно, $mgx_0 = \nu RT_0$ и $2mgx = \nu RT$. Подставляя эти соотношения

в исходное равенство, получим $\nu \frac{3}{2}R(T - T_0) = 2\nu RT_0 - \nu RT. \Rightarrow T = \frac{7}{5}T_0$.

Изменение энтропии идеального газа: $\Delta S = \nu C_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \nu R \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{N} = \frac{5}{2}k \ln \frac{7}{5} - k \ln 2.$$

Здесь $N = \nu N_A$ — число молекул газа, $C_P = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2}kN_A$.

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется баллы согласно следующим критериям:

1	Задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке величины.
0,8	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит вычислительные или логические ошибки (арифметические ошибки, влияющие на порядок величины; ошибки в размерности; незначительные ошибки в выкладках; ошибка в знаке величины; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т.п.)
0,5	Задача не решена или решена частично, но все необходимые для решения физические законы сформулированы и корректно применены к задаче. При этом есть исходная система уравнений, выкладки начаты, но не доведены до конца, либо содержат грубые ошибки.
0,2	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: использованы физические законы, на основе которых задача может быть решена, однако допущены ошибки на этапе составления исходной системы.
0	Задача не решена: основные физические законы перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче; подход к решению принципиально неверен; решение задачи не соответствует условию; попытки решить задачу не было.

Оценка за работу равна удвоенной сумме баллов по всем задачам, округленной до ближайшего целого (десятибалльная система).

Итоговая оценка за письменную работу:

10, 9, 8 баллов – отлично,

7, 6, 5 баллов – хорошо,

4, 3 балла – удовлетворительно,

2, 1, 0 баллов – неудовлетворительно.

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГАОУ ВО «МФТИ (ГУ)»

Экзамен для переводников и восстанавливающихся на третий семестр

июль 2017 г.

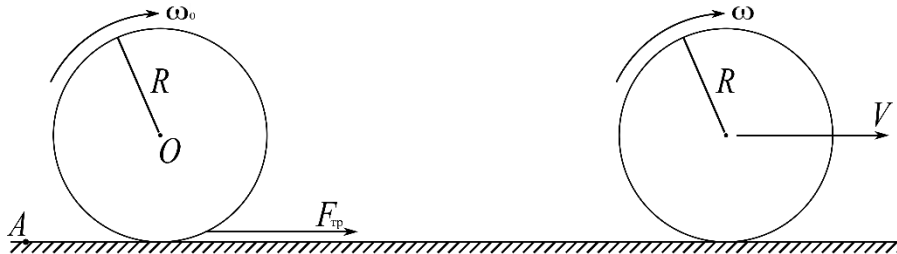
1. Найти радиус круговой орбиты спутника Земли, если он всё время находится над одной и той же точкой земной поверхности в экваториальной плоскости.
2. Кольцо радиуса R раскручено до угловой скорости ω_0 и поставлено вертикально на шероховатую плоскость. Найти линейную скорость центра кольца после прекращения проскальзывания.
3. На широте $\varphi = 60^\circ$ паровоз массой $m = 100$ т идёт с юга на север со скоростью $v = 72$ км/ч по железнодорожному пути вдоль меридиана. Найти силу, с которой паровоз действует на рельсы в направлении, перпендикулярном ходу поезда.
4. Идеальный газ расширяется по закону $PV^2 = \text{const}$.
 - а) Нагревается он или охлаждается?
 - б) Как зависит его температура от объёма в этом процессе?
 - в) Найти его молярную теплоёмкость в этом процессе.
5. Найти приращение энтропии одного моля азота при нагревании его от 100°C до 200°C :
 - а) при $V = \text{const}$;
 - б) при $P = \text{const}$.

Решение

$$1. \omega^2 R = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{M R_3^2}{R_3^2 R^2} = g \frac{R_3^2}{R^2}$$

$$R = \left(\frac{g R_3^2}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{g T^2 R_3^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ м} = 4,2 \cdot 10^4 \text{ км}$$

2.



Относительно оси A сохраняется момент импульса кольца:

$$mR^2 \omega_0 = mVR + mR^2 \omega \quad (1)$$

$$V = \omega R \quad (2)$$

$$\text{Из (1), (2): } \omega = \frac{\omega_0}{2}; \quad V = \frac{R\omega_0}{2}$$

3. На паровоз действует сила Кориолиса:

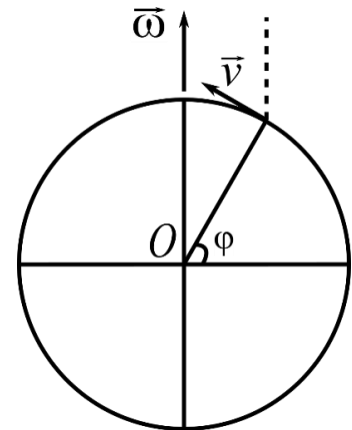
$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$$

Сила, с которой паровоз действует на рельсы:

$$\vec{F} = \vec{F}_k = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$$

$$F = 2mv\omega \sin \varphi = 252 \text{ Н}$$

Паровоз действует на правый (по ходу поезда) рельс пути.



4. а) $n = 2 \Rightarrow$ Газ охлаждается при расширении.

$$\text{б) } PV^2 = \nu RT = \text{const}; \quad T \sim 1/V.$$

$$\text{в) } n = 1 - \frac{R}{C - C_V}, \quad n = 2 \Rightarrow C = C_V - R.$$

$$5. \text{ а) } \Delta S_V = \int_1^2 \frac{\delta Q_V}{T} = \int_1^2 \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} = 4,93 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$\text{б) } \Delta S_P = \int_1^2 \frac{\delta Q_P}{T} = \int_1^2 \frac{C_P dT}{T} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} = 6,91 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется баллы согласно следующим критериям:

1	Задача решена верно: приведено обоснованное решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке величины.
0,8	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит вычислительные или логические ошибки (арифметические ошибки, влияющие на порядок величины; ошибки в размерности; незначительные ошибки в выкладках; ошибка в знаке величины; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства и т.п.)
0,5	Задача не решена или решена частично, но все необходимые для решения физические законы сформулированы и корректно применены к задаче. При этом есть исходная система уравнений, выкладки начаты, но не доведены до конца, либо содержат грубые ошибки.
0,2	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: использованы физические законы, на основе которых задача может быть решена, однако допущены ошибки на этапе составления исходной системы.
0	Задача не решена: основные физические законы перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче; подход к решению принципиально неверен; решение задачи не соответствует условию; попытки решить задачу не было.

Оценка за работу равна удвоенной сумме баллов по всем задачам, округленной до ближайшего целого (десятибалльная система).

Итоговая оценка за письменную работу:

10, 9, 8 баллов – отлично,

7, 6, 5 баллов – хорошо,

4, 3 балла – удовлетворительно,

2, 1, 0 баллов – неудовлетворительно.